Chapitre 6
COUPLES ALEATOIRES DISCRETS

6.1 GENERALITES

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $X(\Omega) = \{x_i ; i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j ; j \in \mathbb{N}\}$.

6.1.1 Loi de probabilité d'un couple (*X, Y*).

Définition 6.1 : On appelle **loi de probabilité du couple** (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_j, p_{ij}) avec $p_{ij} = P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

On a alors $\sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_j \sum_i p_{ij} = 1$

Dans le cas o`u $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis avec peu d'éléments, les résultats peuvent être donnés dans un tableau à doubles entrées.

Exemple : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement 2 boules. On envisage les deux modes de tirages avec ou sans remise et, dans les deux cas, X_k vaut 1 si la k-ième boule tirée est blanche, 0 sinon (k = 1 ou 2). On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer, dans les deux cas, la loi de (X_1, X_2), puis la loi de (X_1, Y).

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$$

Si on pose $q_{ij} = P([X_1 = 0] \cap [Y = j])$, on a alors :

$$q_{00} = P([X_1 = 0] \cap [Y = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$$

$$q_{10} = P([X_1 = 1] \cap [Y = 0]) = 0$$

$$q_{01} = P([X_1 = 0] \cap [Y = 1]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1])$$

$q_{11} = P([X_1 = 1] \cap [Y = 1]) = P([X_1 = 1])$ car $[X_1 = 1] \subset [Y = 1]$

a) Cas du tirage avec remise

Les événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ sont indépendants car les tirages se font avec remise et sont donc indépendants les uns des autres (la composition de l'urne ne varie pas).

On a donc $p_{ij} = P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = P([X_1 = i]).P([X_2 = j])$ pour i, j ∈ {0, 1}, avec $P([X_k = 1] = \frac{3}{7}$ et $P([X_k = 0] = \frac{4}{7}$ pour k ∈ {1, 2}.

Ainsi, on obtient :

$p_{00} = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$; $p_{10} = p_{01} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$; $p_{11} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$q_{00} = p_{00} = \frac{16}{49}$; $q_{00} = 0$; $q_{01} = p_{01} = \frac{12}{49}$; $q_{11} = P([X_1 = 1]) = \frac{3}{7} = \frac{21}{49}$

b. Cas du tirage sans remise

Il n'y a pas ici indépendance des tirages car la composition de l'urne varie. On a ici :

$$p_{ij} = P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = P\big([X_1 = i]\big).P^{P([X_1=i])}\big([X_2 = j]\big)$$

Il vient alors :

$p_{00} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$; $p_{10} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$; $p_{01} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$; $p_{11} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

$q_{00} = p_{00} = \frac{2}{7}$; $q_{00} = 0$; $q_{01} = p_{01} = \frac{2}{7}$; $q_{11} = P([X_1 = 1]) = \frac{3}{7}$

6.1.2 Lois marginales.

Définition 6.2 : Les v.a.r. *X* et *Y* sont appelées **v.a.r. marginales** du couple (*X, Y*) ; les lois des v.a.r. *X* et *Y* sont appelées **lois marginales** du couple (*X, Y*)

On pose $p_{i.} = \sum_j p_{ij}$ et $p_{.j} = \sum_i p_{ij}$

Théorème 6.1 : La loi de *X* est définie par l'ensemble des couples (x_i, $p_{i.}$) pour $i \in$ IN et la loi de *Y* est définie par l'ensemble des couples (y_j, $p_{.j}$) pour $j \in$ IN.

Lorsque l'on représente la loi du couple dans un tableau, la loi de *X* est obtenue en faisant la somme sur les lignes (c'est-à-dire que $p_{i.}$ est la somme des p_{ij} sur la *i*-ème ligne) et la loi de *Y* est obtenue en faisant la somme sur les colonnes (c'est-à-dire que $p_{.j}$ est la somme des p_{ij} sur la *j*-ème colonne).

Sur l'exemple de 6.1.1,

• dans le cas a), $p_{0.} = p_{00} + p_{01} = \frac{16+12}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$ et $p_{1.} = p_{10} + p_{11} = \frac{12+9}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$; de même $p_{.0} = \frac{4}{7}$ et $p_{.1} = \frac{3}{7}$;

• dans le cas b), $p_{0.} = p_{00} + p_{01} = \frac{2+2}{7} = \frac{4}{7}$ et $p_{1.} = p_{10} + p_{11} = = \frac{2+1}{7} = \frac{3}{7}$; de même $p_{.0} = \frac{4}{7}$ et $p_{.1} = \frac{3}{7}$.

On constate que les lois marginales du couple (X_1, X_2) sont les mêmes dans les 2 cas, c'est-à-dire quelles que soient les modalités du tirage, alors que la loi du couple (X_1, X_2) est différente dans les 2 cas. Ceci montre bien que la donnée des lois marginales est une information trop pauvre pour reconstituer la loi du couple. On peut passer de la loi du couple aux lois marginales, mais on ne peut pas faire l'inverse en général.

6.1.3 Lois conditionnelles.

Si $p_{i.} \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$ est définie par l'ensemble des couples $\left(y_j , \frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)$, pour $j \in$ IN. On peut de même définir la loi conditionnelle de X sachant $[Y= y_j]$.

Lorsque l'on représente la loi du couple dans un tableau, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_j]$ est obtenue en prenant la j-ème colonne du tableau, divisée par la somme des p_{ij} sur la j-ème colonne et la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$ est obtenue en prenant la i-ème ligne, divisée par la somme des p_{ij} sur la i-ème ligne.

Sur l'exemple 6.1.1, loi conditionnelle de :

X_1 sachant $[X_2 = 0]$; $\frac{p_{00}}{p_{.0}} = \frac{4}{7}, \frac{p_{10}}{p_{.0}} = \frac{3}{7}$ pour a) ; ; $\frac{p_{00}}{p_{.0}} = \frac{1}{2}, \frac{p_{10}}{p_{0.}} = \frac{1}{2}$ pour b) ;

X_1 sachant $[X_2 = 1]$; $\frac{p_{01}}{p_{.1}} = \frac{4}{7}, \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{3}{7}$ pour a) ; ; $\frac{p_{01}}{p_{.1}} = \frac{2}{3}, \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{1}{3}$ pour b) ;

X_2 sachant $[X_1 = 0]$; $\frac{p_{00}}{p_{0.}} = \frac{4}{7}, \frac{p_{01}}{p_{0.}} = \frac{3}{7}$ pour a) ; ; $\frac{p_{00}}{p_{0.}} = \frac{1}{2}, \frac{p_{01}}{p_{0.}} = \frac{1}{2}$ pour b) ;

X_2 sachant $[X_1 = 1]$; $\frac{p_{10}}{p_{1.}} = \frac{4}{7}, \frac{p_{11}}{p_{1.}} = \frac{3}{7}$ pour a) ; ; $\frac{p_{10}}{p_{1.}} = \frac{2}{3}, \frac{p_{11}}{p_{0.}} = \frac{1}{3}$ pour b) ;

X_1 sachant $[Y = 0]$; $\frac{q_{00}}{q_{.0}} = 1, \frac{q_{10}}{q_{.0}} = 0$ pour a) ; ; $\frac{q_{00}}{q_{.0}} = 1 , \frac{q_{10}}{q_{0.}} = 0$ pour b) ;

X_1 sachant $[Y = 1]$; $\frac{q_{01}}{q_{.1}} = \frac{12}{33}, \frac{q_{11}}{q_{.1}} = \frac{21}{33}$ pour a) ; ; $\frac{q_{01}}{q_{.1}} = \frac{2}{5}, \frac{p_{11}}{p_{.1}} = \frac{3}{5}$ pour b) ;

Y sachant $[X_1 = 0]$; $\frac{q_{00}}{q_{0.}} = \frac{4}{7}, \frac{q_{01}}{q_{0.}} = \frac{3}{7}$ pour a) ; ; $\frac{q_{00}}{q_{0.}} = \frac{1}{2}, \frac{p_{01}}{p_{0.}} = \frac{1}{2}$ pour b) ;

Y sachant $[X_1 = 1]$; $\frac{q_{10}}{q_{1.}} = 0 , \frac{q_{11}}{q_{1.}} = 1$ pour a) ; ; $\frac{q_{10}}{q_{1.}} = 0 , \frac{p_{11}}{p_{0.}} = 1$ pour b) ;

On remarque que, dans le cas a), la loi conditionnelle de X_k sachant $[X_l = 0]$ et la loi conditionnelle de X_k sachant $[X_l = 1]$ sont les mêmes que la loi de X_k, ce qui n'est pas le cas dans le cas b)

6.1.4 Indépendance de deux v.a.r. discrètes.

Définition 6.3 : Deux v.a.r. discrètes X et Y sont dites **indépendantes** si, pour tout $(i, j) \in$ IN^2, on a :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i]).P([Y = y_j]) \text{ (c'est-à-dire } p_{ij} = p_{i.}p_{.j})$$

Remarque : C'est le seul cas o`u la loi du couple est entièrement déterminée par les lois marginales

Propriété 6.1 (admise) : Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions numériques f et g, les v.a.r. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

6.1.5 Somme de deux v.a.r. discrètes.

Théorème 6.2 : Soient X et Y deux v.a.r. discrètes et soit $Z = X + Y$. Pour $z \in Z(\Omega)$, on pose $I_z = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 ; x_i + y_j = z\}$; alors $P([Z = z]) = \sum_{(i,j)\in I_z} p_{ij}$

Preuve : (Cf. tableau)

Exemple **:** On lance un dé deux fois de suite et on s'intéresse à la somme des points.

Propriétés 6.2 : Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes :

1) si X suit la loi binomiale $B(n, p)$ et Y la loi $B(m, p)$, alors $X + Y$ suit la loi $B(n+m, p)$;

2) si X suit la loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y la loi $P(\mu)$, alors $X + Y$ suit la loi $P(\lambda + \mu)$.

6.2 OPERATEURS CLASSIQUES.

6.2.1 Espérance.

Propriétés 6.3 :

1) Si X et Y possèdent une espérance, alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

2) Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{E}(XY)$ existe.

Théorème 6.4 : Soit φ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(X, Y)$ admette une espérance. Alors :

$$IE(\varphi(X)) = \sum_{(i,j)} \varphi(x_i, y_j) P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

Propriété 6.4 : Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarque : La réciproque est en général fausse.

6.2.2 Variance et covariance.

Définition 6.4 : Si X et Y sont d'ordre 2, on appelle :

1) covariance de X et de Y , le réel $\text{cov}(X, Y)$ défini par

$$\text{cov}(X, Y) = \text{IE}\,((X - \text{IE}(X))(Y - \text{IE}(Y)))\;;$$

2) coefficient de corrélation linéaire de X et de Y , le réel $\rho(X, Y)$ défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\;;$$

3) matrice de covariance de X et de Y , la matrice $\Gamma(X, Y)$ définie par :

$$\Gamma(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cov}(X,X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{cov}(Y,Y) \end{pmatrix}$$

Propriétés 6.5 :

1)i) $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) = \text{IE}(XY) - \text{IE}(X)\text{IE}(Y)$;

1)ii) $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$;

1)iii) si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$ et $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$;

1)iv) $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac\ \text{cov}(X, Y)$.

2) $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ et $\rho(aX + b, cY + d) = \frac{ac}{|ac|}\rho(X, Y)$.

6.3 COUPLES ALEATOIRES A DENSITE

6.3.1 Loi de probabilité d'un couple

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

Définition 6.5 : On appelle fonction de répartition du couple (X,Y) la fonction $F_{X,Y}$ définie sur IR^2 par **:**

$$F_{X,Y}(X,Y) = P([X \le x] \cap [Y \le y])$$

Propriété 6 .6 : Les fonctions de répartition des v.a.r. X et Y vérifient

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) \text{ et } F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

Lois conditionnelles :

Définition 6.6 : Pour tout x ∈ IR tel que $F_X(x) \neq 0$, la **densité conditionnelle** de Y sachant (X = x) est la fonction g_x, notée $f_Y^{X=x}$ définie par $g_x(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

6.3.2 Indépendance

Définition 7.7 : Deux v.a.r. *X* et *Y* sont dites **indépendantes** si, pour tout (*x, y*) $\in$ IR^2, on a :

$$F_{X,Y}(x,y) = F_{X,}(x)F_Y(y)$$

On admet que ceci équivaut `a $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout (x, y) ∈ IR$^2$ ou bien `a IE(g(X)h(Y)) = IE(g(X))IE(h(Y)) pour toutes fonctions g et h pourvu que ces espérances existent.

Attention : IE(XY) = IE(X)IE(Y) n'est pas suffisant pour conclure sur l'indépendance de X et de Y .

Propriété 7.7 : Si *X* et *Y* sont indépendantes, alors $f_Y^{X=x} = f_y$ pour tout *x* tel que $f_X(x) \neq 0$ et $f_X^{Y=y} = f_X$ pour tout *y* tel que $f_Y(y) \neq 0$

Application aux lois normales :

Théorème 6.5 : Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes de lois respectives N (m_1, σ_1^2),

et N (m_2, σ_2^2), alors la v.a.r. X + Y suit la loi normale N (m_1 + m_2, σ_1^2), + σ_2^2),).